28.02.2020

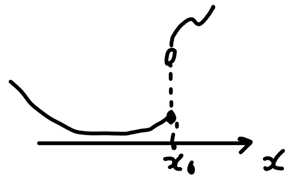
# Негладък анализ

Разглеждаме задачи от вида

$$\min_{x \in S} f(x),$$

където $X$ е Банахово и $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

<u>Опр.</u> $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се нарича <u>полунепрекъсната отдолу</u> (lower semicontinuous / lsc) в т. $x_0$, ако изпълнява някое от еквивалентните условия




(а) $\forall x_\alpha \to x_0 : f(x_0) \le \liminf f(x_\alpha)$

(б) $\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : r \ge f(x)\}$ е затворено множество

<u>Опр.</u> <u>Домейн</u> на $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ наричаме

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

$f$ наричаме <u>собствена</u> (proper), ако $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

<u>Опр.</u> $f$ наричаме <u>изпъкнала</u>, ако е изпълнено някое от еквивалентните условия

(а) $\forall x, y \in X \ \forall t \in (0,1)$, $f(tx + (1-t)y) \le t f(x) + (1-t) f(y)$

(б) $\operatorname{epi} f$ е изпъкнало множество ($\Rightarrow \operatorname{dom} f$ е изп.)

<u>Пр. 1</u> (Изпъкнали функции)

1) $f(x) = \|x\|$

2) $d_C(x) := \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\}$ за $C$ - изпъкнало

3) $i_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases}$

$i_C$ е изп $\Leftrightarrow$ $C$ е изп.

$i_C$ е lsc $\Leftrightarrow$ $C$ е затв.

4) Нека $A \subseteq X^*$, $\overline{co}^* A \neq X^*$

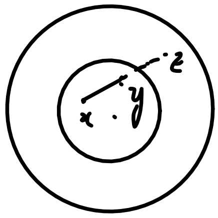
$\sigma_A(x) = \sup\{\langle x^*, x\rangle \mid x^* \in A\}$ – опорна функция

$\sigma_A$ е lsc, собствена и изпъкнала

<u>Тв. 2</u> Нека $D \subseteq X$ е отв. изп. и $f : D \to \mathbb{R}$ – изпъкнала. $f$ е локално ограничена в $x_0 \in D \Rightarrow f$ е лок. Липшицова в $x_0$

<u>Д-во</u>

$\exists \delta > 0$ и $M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in B_{2\delta}(x_0)$




$x, y \in B_\delta(x_0)$

$\alpha := \|x - y\| < \delta \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta} \in (0,1)$ и $\frac{\delta - \alpha}{\delta} \in (0,1)$

Нека $z := y + \frac{\alpha}{\delta}(y - x)$

$$y = \frac{\alpha}{\alpha+\delta} z + \frac{\delta}{\alpha+\delta} x$$

$f$ е изп. $\Rightarrow f(y) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\delta} f(z) + \frac{\delta}{\alpha+\delta} f(x) \quad \Big| - f(x)$

$$|f(y) - f(x)| \leq \left| \frac{\alpha}{\alpha+\delta} f(z) - \frac{\alpha}{\alpha+\delta} f(x) \right| \leq \frac{\alpha}{\alpha+\delta} 2M \leq \frac{2M}{\delta} \|x - y\|$$

$\square$

<u>Заб</u>. Достатъчно е $f$ да бъде лок. ограничена отгоре:

$f(x) \leq M$ за $x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow 2x_0 - x \in B_\delta(x_0)$

$$x_0 = \frac{2x_0 - x}{2} + \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq \frac{f(2x_0 - x)}{2} + \frac{f(x)}{2}$$

$$\Rightarrow -f(x) \leq -2f(x_0) + f(2x_0 - x) \leq M - 2f(x_0)$$

$|f(x)| \leq \min(M, M - 2f(x_0))$

<u>Тв. 3</u> Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е lsc, собствена и изп.

$D := \operatorname{int} \operatorname{dom} f \neq \emptyset \Rightarrow f$ е лок. Липшицова върху $D$.

Д-во $f: D \to \mathbb{R}$

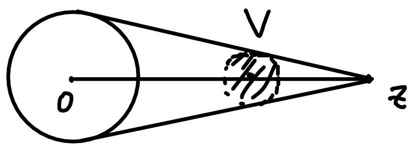
Достатъчно е да докажем, че $f$ е лок. ограничено върху $D$.

$D_n \overset{\in \text{затв.}}{:=} \{x \in D \mid f(x) \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow D = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n$

$\operatorname{int} D \neq \emptyset \overset{\text{т. Бер}}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \operatorname{int} D_n \neq 0$.

б.о.о. $\exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subseteq \underset{\text{отв.}}{U} \subseteq \operatorname{int} D_{n_0}$




Нека $y \in D \setminus \overline{B}_\delta(0)$

$\Rightarrow \exists \mu > 1 : z = \mu y \in D$

$\lambda := \frac{1}{\mu} \in (0,1)$

$V := \lambda z + (1-\lambda) B_\delta(0) = y + (1-\lambda) B_\delta(0)$ - отв. околност на $y$

Нека $x \in B_\delta(0)$ и $M_z := f(z)$

$V = \lambda z + (1-\lambda) x$

$f$ е изп. $\Rightarrow f(v) \leq \lambda \underbrace{f(z)}_{\leq M_z} + (1-\lambda) \underbrace{f(x)}_{\leq n} < +\infty$

$\Rightarrow f$ е лок. ограничена във $V$ - ок. на $y$

$\square$

**Зад.** $X$ и $\mathbb{R}$ са Банахови $\Rightarrow (X \times \mathbb{R}, \|x\| + |r|)$ също е Банахово

**Тв. 4** $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, изпъкнала и lsc.

$f$ е непр. в $x_0 \in \operatorname{dom} X \Rightarrow \operatorname{int} \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ и $\operatorname{int} \operatorname{epi} f \neq \emptyset$

Д-во

$x \notin \operatorname{dom} f \Rightarrow f(x) = +\infty$

$f$ е непр. в $x_0$, $\exists \underset{\text{ок.}}{U} \ni x_0 : |f(x) - f(x_0)| \leq 1$

$f(x) \leq f(x_0) + 1 \Rightarrow \forall x \in U : x \in \operatorname{dom} f$

$U \subseteq \operatorname{dom} f$

$\emptyset \neq U \times \{r \in \mathbb{R} \mid r > f(x_0) + 1\} \subseteq \operatorname{epi} f$

$\square$

**Опр.** Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, lsc и изпъкнала

**Субдиференциал** на $f$ в $x \in X$ наричаме

$$\partial f(x) = \{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x \rangle \le f(y) - f(x) \quad \forall y \in \operatorname{dom} f \}$$

$(x \notin \operatorname{dom} f \Rightarrow \partial f(x) = \emptyset)$

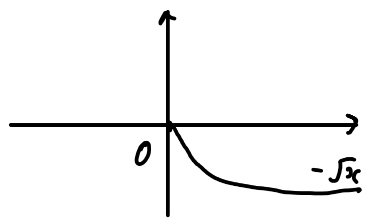
**Дясна производна на $f$ в $x \in X$ по направление** $y \in X$ наричаме

$$d^+ f(x)(y) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}$$

$$d^+ f(x)(y) = +\infty \iff x + ty \notin \operatorname{dom} f \quad \forall y \in X \ \forall t > 0$$

**Пр.5**

$$f(x) := \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \ge 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$




$$d^+ f(0)(1) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{-\sqrt{t} - 0}{t} = -\infty$$

**Тв.6** $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е изп. собств. lsc.

$x \in \operatorname{dom} f$

$$x^* \in \partial f(x) \iff \langle x^*, y \rangle \le d^+ f(x)(y) \quad \forall y \in X$$

**Д-во**

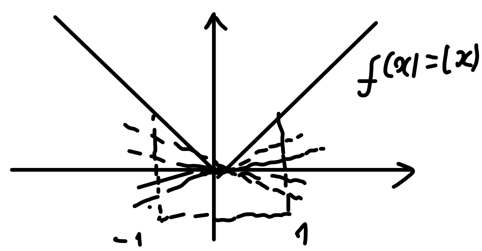
$$x^* \in \partial f(x) \iff \langle x^*, ty \rangle \le f(x+ty) - f(x)$$

$$\langle x^*, y \rangle \le \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}, \quad \forall t > 0 \ \forall y \in X$$

□

**Пр.7**

1) $f(x) = \|x\|$




$$x^* \in \partial f(0) \iff \langle x^*, x \rangle \le \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\iff \langle x^*, \frac{x}{\|x\|} \rangle \le 1 \quad \forall x \in X$$

$$\iff \|x^*\| = \sup \langle x^*, \frac{x}{\|x\|} \rangle \le 1$$

$$\Rightarrow \quad \partial f(0) = \overline{B}_{X^*}$$

<u>Πρ.8</u> $\underset{\substack{\text{κυρ.} \\ \text{κλστ.}}}{C \subseteq X}$

$$x^* \in \partial i_C(x) \iff \langle x^*, y - x \rangle \leq i_C(y) - \underset{\substack{\| \\ 0}}{i_C(x)} \qquad \forall y \in X$$

$$\langle x^*, x \rangle \geq \langle x^*, y \rangle - i_C(y) \qquad \forall y \in X$$

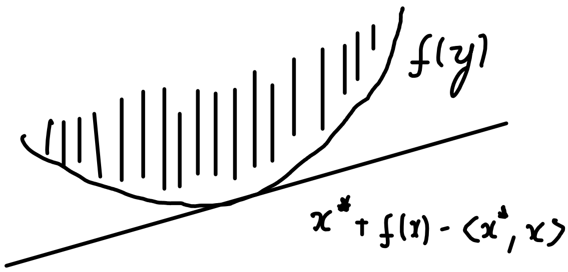
$$\langle x^*, x \rangle \geq \sup_{y \in X} \left( \langle x^*, y \rangle - i_C(y) \right) \geq \sup_{y \in X} \langle x^*, y \rangle = \sigma_C(x^*)$$

06.03.2020

X - Банахово

$f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - изп., собств., lsc

$$\partial f(x) = \begin{cases} x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x) \quad \forall y \in X \\ \emptyset, \ x \notin \operatorname{dom} f \end{cases}$$




$$d^+ f(x_0)(y) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + ty) - f(x_0)}{t}$$

$$\underline{x^* \in \partial f(x) \iff \langle x^*, y\rangle \le d^+ f(x_0)(y)}$$

Разгл. оптимизационната задача

$$\left| \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in X \end{array} \right.$$

<u>Тв. 9</u> $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - изп., собств., lsc

$x_0 \in X$ е глобален минимум за $f \iff 0 \in \partial f(x_0)$

<u>Д-во</u>

$0 \in \partial f(x_0) \Rightarrow \langle 0, y - x_0\rangle \le f(y) - f(x_0) \quad \forall y \in X$

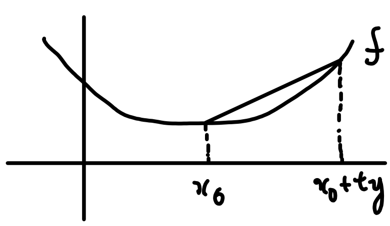
$f(x_0) \le f(y) \quad \forall y \in X$

□

<u>Тв. 10</u> $f$ - изп., непр. в $x_0 \in X \Rightarrow d^+ f(x_0)$ съществува и е непр. сублинеен функционал

$$\left| \begin{array}{l} p(tx) = t\,p(x), \ t > 0 \\ p(x + y) \le p(x) + p(y) \end{array} \right.$$

<u>Д-во</u> Нека $s > t > 0$. Б.о.о. $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$




$f$ е изп. $\Rightarrow f(ty) \le \frac{t}{s} f(sy) + \underbrace{\frac{s-t}{s} f(0)}_{=0} \ \Big| \cdot \frac{1}{t}$

$$\frac{f(ty)}{t} \le \frac{f(sy)}{s} \quad \forall s > t$$

$$2x_0 = x_0 - ty + x_0 + ty$$

$$x_0 = \frac{x_0 - ty}{2} + \frac{x_0 + ty}{2}$$

$$\Rightarrow f(x_0) \le \frac{1}{2} f(x_0 - ty) + \frac{1}{2} f(x_0 + ty)$$

$$-\frac{f(x_0 - ty) - f(x_0)}{t} \le \frac{f(x_0 + ty) - f(x_0)}{t} \leftarrow \text{огр.}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + ty) - f(x_0)}{t} \quad \forall y \in X$$

$$d^+ f(x_0)(\lambda y) = \lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + (t\lambda) y) - f(x_0)}{\lambda t} = \lambda d^+ f(x_0)(y)$$

$$d^+ f(x_0)(y_1 + y_2) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + ty_1 + ty_2) - f(x_0)}{t}$$

$$x_0 + t(y_1 + y_2) = \frac{x_0 + 2ty_1}{2} + \frac{x_0 + 2ty_2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x_0 + t(y_1 + y_2)) \le \frac{1}{2} f(x_0 + 2ty_1) + \frac{1}{2} f(x_0 + 2ty_2)$$

$$\Rightarrow d^+ f(x_0)(y_1 + y_2) \le \lim_{t \downarrow 0} \left( \frac{f(x_0 + 2ty_1) - f(x_0)}{2t} + \frac{f(x_0 + 2ty_2) - f(x_0)}{2t} \right) =$$

$$= d^+ f(x_0)(y_1) + d^+ f(x_0)(y_2)$$

---

$f$ е лок. Липшицова в $x_0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0, \mu > 0 : |f(x) - f(x_0)| \le \mu \|x - x_0\| \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

За дост. малко $t > 0$: $x_0 + ty \in B_\delta(x_0)$

$$f(x_0 + ty) - f(x_0) \le \mu t \|y\|$$

$$\frac{f(x_0 + ty) - f(x_0)}{t} \le \mu \|y\| \quad \forall \text{ дост. малко } t > 0$$

$t \downarrow 0 \Rightarrow d^+ f(x_0)(y) \le \mu \|y\| \quad \forall y \in X \Rightarrow d^+ f(x_0)$ - непр.

Тв.11 $f$ - изпъкнала, непр. в $x_0 \in X$

$\Rightarrow \partial f(x_0)$ - непразно, изпъкнало и $w^*$-комп. подмножество на $X^*$

и $x \mapsto \partial f(x)$ - локално огр. в $x_0$

Д-во

$d^+ f(x_0)$ - непр. линеен функционал

$\Rightarrow \exists x^* \in X^* : \langle x^*, y \rangle \leq d^+ f(x_0)(y), \forall y \in X \Rightarrow x^* \in \partial f(x_0)$

Имаме, че $\partial f(x_0)$ е изп. и $w^*$-затв. по деф.

$f$ е лок. липшицова в $x_0$, $\exists \delta > 0, \mu > 0$:

$\forall x, y \in B_\delta(x_0): |f(y) - f(x)| \leq \mu \|y - x\|$

$\Rightarrow \langle x^*, y - x \rangle \leq \mu \|y - x\| \quad \forall x, y \in B_\delta(x_0)$

$\langle x^*, \frac{y - x}{\|y - x\|} \rangle \leq \mu$

$\Rightarrow$ за $x$ близки до $x_0$, $f(x)$ е ограничено

$x = x_0 \Rightarrow \partial f(x_0)$ - $w^*$ - компактен. □

Тв.12 $f, g: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ са изп., собств., lsc и

$(*)$ $\exists x' \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = \operatorname{dom}(f+g)$ : $f$ е непр. в $x'$

$\Rightarrow \partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom}(f+g)$